❖ نقطه C صادق در قضیه رل (در نتیجه $f'(0)=0$) را در صورتی بیابید که:

1) $f(x)=x^2-3x+5 \quad , \quad a=1 \quad , \quad b=2$

حل:

$f(a)=f(1)=3 \;,\; f(b)=f(2)=3 \quad \Rightarrow \quad f(a)=f(b)=3$

$f'(x)=2x-3 \quad \Rightarrow \quad f'(c)=2c-3=0 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{3}{2}$

2) $f(x)=2x^3-x^2-2x+5 \quad , \quad a=-1 \quad , \quad b=1$

حل:

$f(-1)=4 \quad , \quad f(1)=4 \quad \Rightarrow \quad f(a)=f(b)=4$

$f'(x)=6x^2-2x-2 \quad \Rightarrow \quad f'(c)=6c^2-2c-2=0 \quad \Rightarrow \quad f'(c)=3c^2-c-1=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1=\frac{1-\sqrt{13}}{6} \\ c_2=\frac{1+\sqrt{13}}{6} \end{cases}$$

C_1 غیرقابل قبول است زیرا در بازه $[-1,1]$ قرار ندارد.

3) $f(x)=\frac{1}{1+x^2} \quad , \quad a=-2 \quad , \quad b=2$

حل:

$f(-2)=\frac{1}{5} \quad , \quad f(2)=\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad f(a)=f(b)=\frac{1}{5}$

$f'(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(c)=-\frac{2c}{\left(1+c^2\right)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad c=0$

4) $f(x)=x^{1/2}+(1-x)^{1/2} \quad , \quad a=0 \quad , \quad b=1$

حل:

$f(0)=1 \quad , \quad f(1)=1 \quad \Rightarrow \quad f(a)=f(b)=1$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \quad \Rightarrow \quad f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{c}}-\frac{1}{2\sqrt{1-c}}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{1-c}-2\sqrt{c}}{4\sqrt{c-c^2}}=0$

$\Rightarrow \sqrt{1-c}-\sqrt{c}=0 \quad \Rightarrow \quad 1-c=c \quad \Rightarrow \quad c=\frac{1}{2}$

5) $f(x)=x^{1/2}(2-x)^{1/3} \quad , \quad a=0 \quad , \quad b=2$

حل:

$f(0)=0 \quad , \quad f(2)=0 \quad \Rightarrow \quad f(a)=f(b)=0$

$f'(x)=\frac{\sqrt[3]{2-x}}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{(2-x)^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(c)=\frac{\sqrt[3]{2-c}}{2\sqrt{c}}-\frac{\sqrt{c}}{3\sqrt[3]{(2-c)^2}}=0$

$=\frac{3(2-c)-2c}{6\sqrt{c}\left(\sqrt[3]{(2-c)^2}\right)}=0 \quad \Rightarrow \quad 6-5c=0 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{6}{5}$

6) $f(x)=(3-x)^{4/3} \quad , \quad a=2 \quad , \quad b=4$

حل:

$f(2)=1 \quad , \quad f(4)=1 \quad \Rightarrow \quad f(a)=f(b)=1$

$f'(x)=-\frac{4}{3}(3-x)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad f'(c)=-\frac{4}{3}(3-c)^{1/3}=0 \quad \Rightarrow \quad c=3$

7) $f(x)=\sin x \quad , \quad a=\pi \quad , \quad b=\frac{3\pi}{2}$

حل:

$f(\pi)=0 \quad , \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad f(\pi)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$

$f'(x)=2\cos 2x \quad \Rightarrow \quad f'(c)=2\cos 2c=0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2c=0 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \ldots$

با توجه به اینکه $\frac{5\pi}{4}$ در بازه $\pi, \frac{3\pi}{2}$ قرار دارد قابل قبول می باشد. $c=\frac{5\pi}{4}$

8) $f(x)=\sec x \quad , \quad a=-1.5 \quad , \quad b=1.5$

حل:

$f(-1.5)=1 \, , \, f(1.5)=1 \Rightarrow f(-1.5)=f(1.5)=1$

$f'(x)=\sec x \tan x \quad \Rightarrow \quad f'(c)=\sec c \tan c=0 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{\sin c}{\cos^2 x}=0 \quad \Rightarrow \quad \sin c=0$

$\Rightarrow \quad \sin c=0 \quad \Rightarrow \quad c=0 \;,\; \pm\pi \;,\; \pm 2\pi \;,\; \mathrm{K} \Rightarrow \quad c=0$

با توجه به اینکه $C=0$ دربازه $[-1.5, 1.5]$ قرار دارد قابل قبول می‌باشد. $C=0$

9) تابع $f(x)=1-x^{2/3}$ بر $[1,-1]$ پیوسته بوده و در $x=\pm 1$ مساوی 0 است نشان دهید که نقطه‌ای مانند C در بازه $(-1,1)$ وجود دارد که $f''(c)=0$. چرا این قضیه رل را نقض نمی‌کند؟ تابع را رسم کنید.

$f(1)=0 \quad , \quad f(-1)=0 \quad \Rightarrow \quad f(1)=f(-1)=0$

$f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-1/3} \quad \Rightarrow \quad f'(c)=-\frac{2}{3}c^{-1/3}=0 \quad \Rightarrow \quad f'(c)=0$ $\qquad x\neq 0$ ،وجود ندارد

با توجه به اینکه تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد به عبارتی دیگر مشتق در صفر وجود ندارد پس شرایط قضیه رل را دارا نمی‌باشد. (مراجعه شود به قضیه رل صفحه ۲۵۵ کتاب مرجع)، چون یکی از شرایط قضیه رل برقرار نیست دلیل می‌شود که قضیه رل را نقض نمائید.

10) قضیه رل را برای تابع $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ تحقیق کنید. به عبارت دیگر نشان دهید که f' در نقطه‌ای از بازه $(1,2)$ و در نقطه‌ای از بازه $(2,3)$ مساوی صفر است.

حل:

$f(1)=0, f(2)=0 \quad \Rightarrow \quad f(a)=f(b)=0 \, , \, f(2)=0 \, , \, f(3)=0 \quad \Rightarrow \quad f(a)=f(b)=0$

$f'(x)=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)$

$f'(c)=(c-2)(c-3)+(c-1)(c-3)+(c-1)(c-2)=0$

$\Rightarrow \quad f'(c)=c^2-5c+6+c^2-4c+3+c^2-3c+2=0$

$$f'(x)=3c^2-12c+11=0 \Rightarrow \begin{cases} c_1=\dfrac{6+\sqrt{3}}{3} \\ c_2=\dfrac{6-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$c_1=\dfrac{6+\sqrt{3}}{3}$ نقطه از بازه $[2,3]$ و $c_2=\dfrac{6-\sqrt{3}}{3}$ نقطه در بازه $[1,2]$ می‌باشد.

❖ **با استفاده از قضیه رل نشان دهید که:**

11) معادله $x^3+x^2+x+1=0$ ریشه حقیقی منحصر بفرد دارد.

$f(-1)=0 \Rightarrow x_1=-1$ ریشه معادله فوق

حل:

$f'(x)=3x^2+2x+1 \Rightarrow \Delta=4-3\times3(1)=-8 \Leftrightarrow \Delta<0$

با توجه به اینکه $\Delta<0$ است در نتیجه $f'(x)$ هرگز مساوی صفر نیست لذا معادله یک ریشه منحصر بفرد دارد.

12) معادلهٔ $x^8+x-1=0$ فقط دو ریشه حقیقی دارد.

حل:

$$f(x)=x^8+x-1=0 \Rightarrow f'(x)=8x^7+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1}{\sqrt[7]{8}}$$

با توجه به اینکه $f'(x)$ در یک نقطه صفر می‌شود لذا می‌توان نتیجه گرفت که معادله x^8+x-1 فقط دارای دو ریشه حقیقی می‌باشد که با استفاده از قضیه مقدار میانی می‌توان آنها را بدست آورد.

13) معادلهٔ $x^5-5x+1=0$ فقط سه ریشه حقیقی دارد.

حل:

$$f(x)=x^5-5x+1=0 \Rightarrow f'(x)=5x^4-5 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 5x^4-5=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $f'(x)$ در دو نقطه صفر می‌شود لذا می‌توان نتیجه گرفت که معادله $x^5-5x+1=0$ دارای سه ریشه حقیقی می‌باشد.

❖ **نقطهٔ C صادق در قضیهٔ مقدار میانگین (۷) را در صورتی بیابید که:**

14) $f(x)=x^2+x+1 \quad , \quad a=1 \quad , \quad b=2$

حل:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad , \quad f(x)=2x+1 \Rightarrow f'(c)=2x+1 \quad , \quad f(a)=3 \quad , \quad f(b)=7$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow 2c+1=\frac{7-3}{2-1} \Rightarrow 2c+1=4 \Rightarrow c=\frac{3}{2}$$

15) $f(x)=-x^3-1 \quad , \quad a=0 \quad , \quad b=3$

حل:

$$f(x)=x^3-1 \Rightarrow f'(x)=3x^2 \Rightarrow f'(c)=3c^2 \quad , \quad f(a)=-1 \quad , \quad f(b)=26$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow 3c^2=\frac{26+1}{3} \Rightarrow 3c^2=9 \Rightarrow c=\pm\sqrt{3}$$

$-\sqrt{3}$ غیرقابل قبول می‌باشد زیرا در بازه $[0,3]$ قرار ندارد. پس $c=\sqrt{3}$

16) $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$, $a=1$, $b=0$

حل: $f(x)=\dfrac{1}{2-x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{(2-x)^2} \Rightarrow f'(c)=\dfrac{1}{(2-c)^2}$, $f(a)=1$, $f(b)=\dfrac{1}{2}$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{(2-c)^2}=\frac{\frac{1}{2}-1}{-1} \Rightarrow \frac{1}{(2-c)^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow (2-c)^2=2$$

$$\Rightarrow (2-c)=\sqrt{2} \Rightarrow c=2-\sqrt{2}$$

17) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, $a=2$, $b=3$

حل: $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(c)=\dfrac{2}{(c+1)^2}$, $f(a)=\dfrac{1}{3}$, $f(b)=\dfrac{1}{2}$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{2}{(c+1)^2}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{3-2} \Rightarrow \frac{2}{(c+1)^2}=\frac{1}{6} \Rightarrow (c+1)^2=12$$

$$\Rightarrow c+1=2\sqrt{3} \Rightarrow c=2\sqrt{3}-1$$

18) $f(x)=\sqrt{x}$, $a=9$, $b=25$

$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(c)=\dfrac{1}{2\sqrt{c}}$, $f(a)=3$, $f(b)=5$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}}=\frac{5-3}{25-9} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}}=\frac{1}{8} \Rightarrow 2\sqrt{c}=8$$

$$\Rightarrow \sqrt{c}=4 \Rightarrow c=16$$

19) $f(x)=x^{1/3}$, $a=8$, $b=0$

حل: $f(x)=x^{1/3} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(c)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}$, $f(a)=2$, $f(b)=0$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}=\frac{0-2}{0-8} \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}=\frac{1}{4} \Rightarrow 3\sqrt[3]{c^2}=4$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{c^2}=\frac{4}{3} \Rightarrow c=\left(\frac{4}{3}\right)^{3/2}$$

20) $f(x)=x^{4/3}$, $a=8$, $b=-1$

حل: $f(x)=x^{4/3} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{4}{3}x^{1/3} \Rightarrow f'(c)=\dfrac{4}{3}c^{1/3}$, $f(a)=16$, $f(b)=1$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{4}{3}c^{1/3}=\frac{1-16}{-1+8} \Rightarrow c^{1/3}=-\frac{45}{28} \Rightarrow c=\left(-\frac{45}{28}\right)^3$$

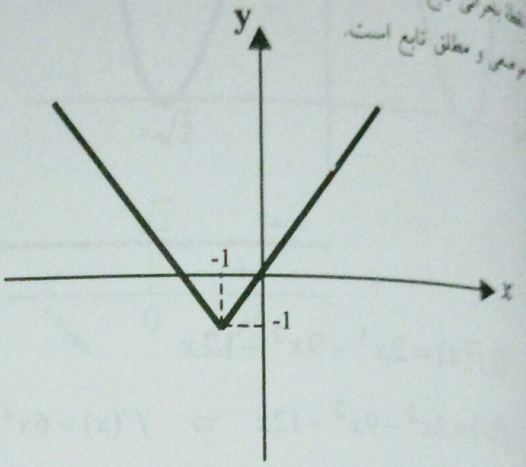
❖ با بررسی تمام نقاط بحرانی، اکسترممهای موضعی تابعی داده شده را بیابید. تابع بر چه بازه‌هایی صعودی است؟ تابع را رسم کنید.

1) $f(x)=|x+1|-1$

حل: $f(x)=|x+1|-1=\begin{cases}x\ , & x\geq -1\\ -x-2, & x<-1\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}1\ , & x\geq -1\\ -1\ , & x<1\end{cases}\ ,\quad f''(x)=0 \Rightarrow$ آزمون مشتق هم بی حاصل است.

نقاط بحرانی تابع فقط $x=-1$ و $y=-1$ است که با توجه به آزمون مشتق (مطابق جدول مقابل) این نقطه مینیمم موضعی و مطلق تابع است.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	●	+
$f(x)$	↘	-1	↗



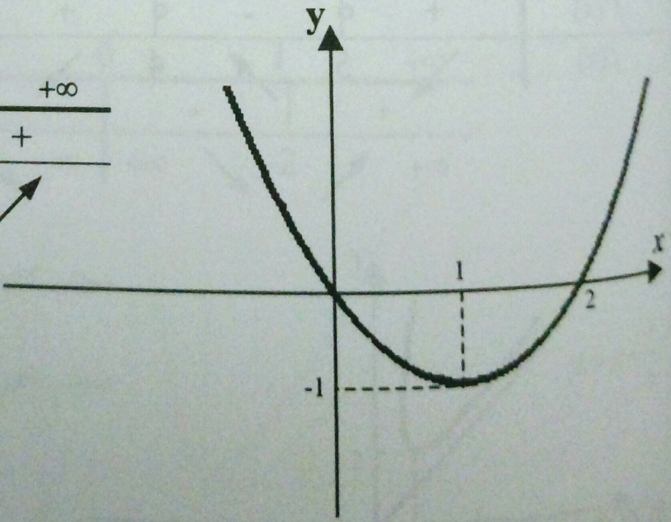
2) $f(x)=x^2-2x$

حل: $f(x)=x^2-2x \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-1$

$f''(x)=2>0$

نقطه بحرانی تابع $(1,-1)$ است. طبق آزمون مشتق دوم چون $f''(x)>0$ است پس در نقطهٔ بحرانی $(1,-1)$ دارای مینیمم موضعی و مطلق است و طبق آزمون مشتق اول داریم:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	●	+
$f(x)$	↘	-1	↗



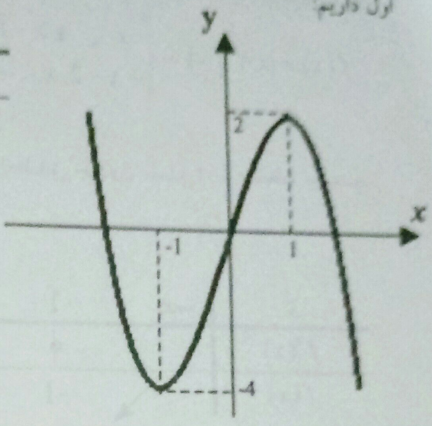
3) $f(x)=3x-x^3$

حل: $f(x)=3x-x^3 \Rightarrow f'(x)=3-3x^2=0 \Rightarrow$ نقاط بحرانی $\begin{cases}x=+1, y=2\\ x=-1, y=-4\end{cases}$

$$f''(x)=-6x \Rightarrow \begin{cases} f''(1)=-6<0 \\ f''(-1)=+6>0 \end{cases}$$

طبق آزمون مشتق دوم $f''(1)<0$ پس ماکزیمم موضعی و $f''(-1)>0$ مینیمم موضعی است و یا طبق آزمون مشتق اول داریم:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	-4	↗	2	↘	



بر $[-1,1]$ صعودی و بر $(-\infty,-1]$ و $[1,\infty)$ نزولی است.

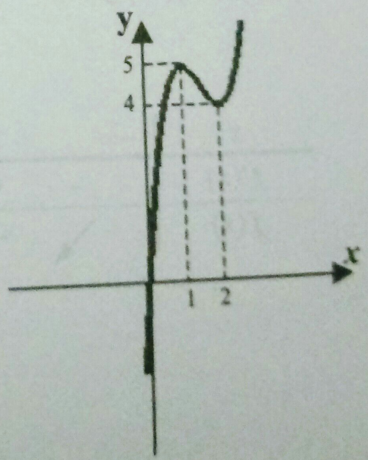
4) $f(x)=2x^3-9x^2+12x$

حل: $f(x)=2x^3-9x^2+12x \Rightarrow f'(x)=6x^2-18x+12=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=5 \\ x=2 \Rightarrow y=+4 \end{cases}$

طبق آزمون دوم مشتق $\Rightarrow f''(x)=12x-18 \Rightarrow \begin{cases} f''(1)=-6<0 & \to \text{مینیمم نسبی} \\ f''(2)=+6>0 & \to \text{ماکزیمم نسبی} \end{cases}$

تابع در نقطهٔ $(1,5)$ دارای ماکزیمم نسبی و در $(2,4)$ دارای مینیمم نسبی است.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	5	↗	4	↘	



صعودی بر $(\infty$ و $2]$ و $[1$ و $-\infty)$ و نزولی بر $[2$ و $1]$

5) $f(x)=x^4-4x^2+4$

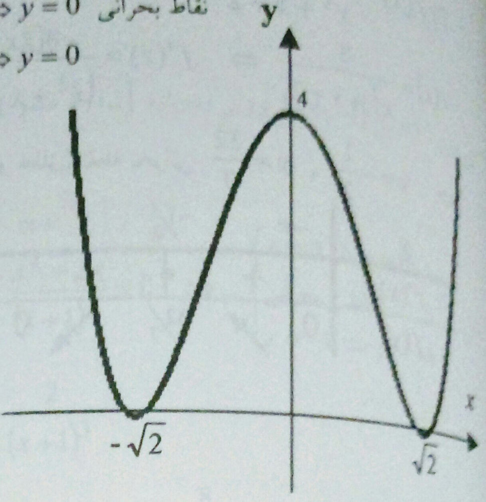
حل:

$f(x)=x^4-4x^2+4 \Rightarrow f'(x)=4x^3-8x$

$$4x^3-8x=0 \Rightarrow 4x(x^2-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=4 \\ x=+\sqrt{2} \Rightarrow y=0 \\ x=-\sqrt{2} \Rightarrow y=0 \end{cases}$$ نقاط بحرانی

$$f''(x)=12x^2-8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(0)=-8<0 & \rightarrow \text{ماکزیمم نسبی} \\ f''(\sqrt{2})=16>0 & \rightarrow \text{مینیمم نسبی ومطلق} \\ f''(-\sqrt{2})=16>0 & \rightarrow \text{مینیمم نسبی ومطلق} \end{cases}$$



x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-		+		-		+	
$f(x)$		↘	0	↗	4	↘	0	↗	

6) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

$$f(x)=x+\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=+1 \Rightarrow y=2 \\ x=-1 \Rightarrow y=-2 \end{cases}$$ حل نقاط بحرانی

$$f''(x)=\frac{+2}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(+1)=2>0 & \rightarrow \text{مینیمم نسبی} \\ f''(-1)=-2<0 & \rightarrow \text{ماکزیمم نسبی} \end{cases}$$

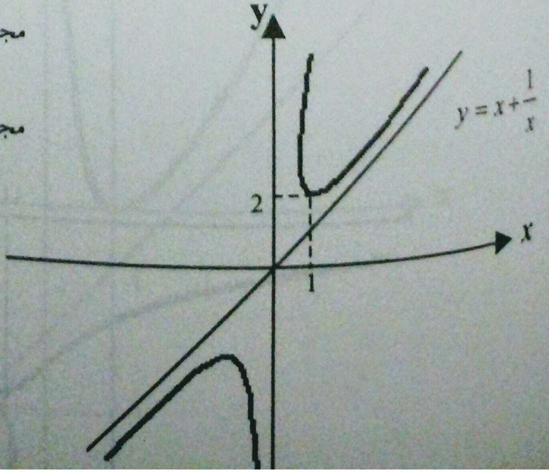
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		-		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘ $-\infty$	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

$$x=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}=\infty \Rightarrow x=0$$ مجانب قائم

$$y=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x^2+1}{x}=\pm\infty$$ مجانب افقی ندارد

$$\begin{cases} m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1 \\ b=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y=x$ معادله خط مجانب



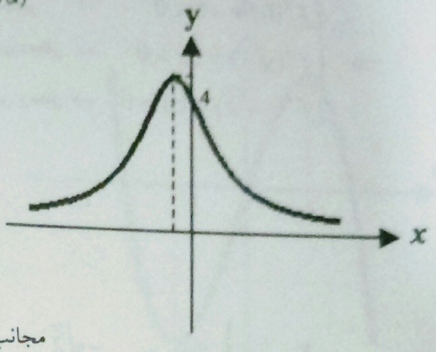
$7)\ f(x)=\dfrac{8}{x^2+x+2}$

حل:

$$f(x)=\frac{8}{x^2+x+2} \Rightarrow f'(x)=\frac{-8(2x+1)}{\left(x^2+x+2\right)^2}=0$$

$$\Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2}\ ,\ y=\frac{32}{7}$$ نقطهٔ بحرانی (ماکزیمم موضعی و مطلق)

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$32/7$	↘	0



$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8}{x^2+x+2}=0 \Rightarrow y=0$$ مجانب افقی

$8)\ f(x)=\dfrac{6x}{x^2+1}$

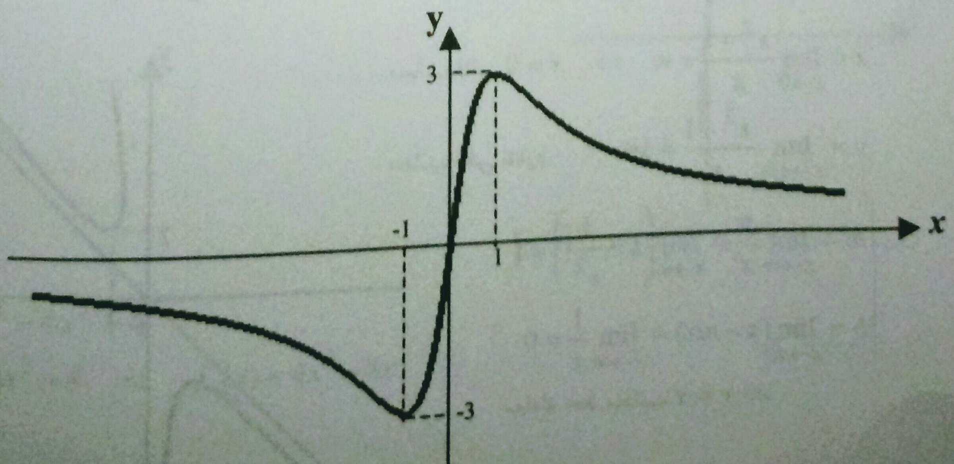
حل: نقاط بحرانی

$$f(x)=\frac{6x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{6\left(x^2+1\right)-12x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-6x^2+6}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=+1 \Rightarrow y=3 \\ x=-1 \Rightarrow y=-3 \end{cases}$$

$$f''(x)=\frac{-12x\left(x^2+1\right)^2-4x\left(x^2+1\right)\left(-6x^2+6\right)}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$\Rightarrow \quad f''(x)=\frac{-4x\left[3\left(x^2+1\right)+6\left(-x^2+1\right)\right]}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{-12x\left(-x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	↘	-3	↗	3	↘	0



$$\Rightarrow \begin{cases} f''(+1)<0 \;\Rightarrow\; \text{ماکزیمم موضعی} \\ f''(-1)>0 \;\Rightarrow\; \text{مینیمم موضعی} \end{cases}$$

$\lim \dfrac{6x}{x^2+1}=0 \;\Rightarrow\; y=0$ مجانب افقی

تابع در بازهٔ $[1,\infty)$ و $(-\infty,-1]$ نزولی و دربازهٔ $[-1,1]$ صعودی است.

$$9)\; f(x)=\frac{x^2}{x+1}$$

$$f(x)=\frac{x^2}{x+1} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \\ \text{نقاط بحرانی} \\ x=-2 \Rightarrow y=-4 \end{cases}$$

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4}=\frac{2}{(x+1)^3}$$

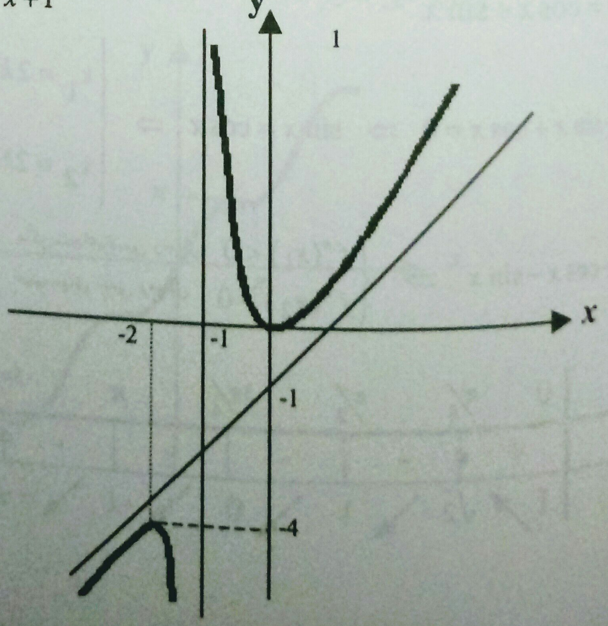
$$\Rightarrow \begin{cases} f''(0)=2>0 \;\Rightarrow\; \text{ماکزیمم موضعی} \\ f''(-2)=-2<0 \;\Rightarrow\; \text{مینیمم موضعی} \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

مجانب افقی : $y=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=\pm\infty$ ندارد

مجانب قائم : $\lim_{x\to-1}\dfrac{x^2}{x+1}=\infty \;\Rightarrow\; x=-1$ مجانب قائم

$$\begin{cases} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1}=1 \\ b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-mn)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-x\right)=-1 \end{cases} \;\Rightarrow\; y=x-1 \text{ مجانب مایل}$$



حل:

10) $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$ $\qquad D_f:(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$

$f'(x)=\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}=0 \Rightarrow x=-1\notin Df$ نقطهٔ بحرانی ندارد

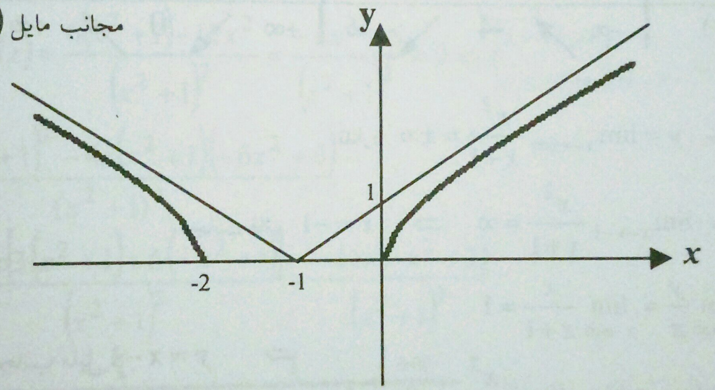
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty$ مجانب قائم و مجانب افقی ندارد

f	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'		-				+	
f	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

$$\begin{cases} m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x}=\pm1 \\ b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-mx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\times\frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\pm1$$

$y=\pm(x+1)$ مجانب مایل



11) $f(x)=\cos x+\sin x$

حل:

$$f'(x)=-\sin x+\cos x=0 \Rightarrow \sin x=\cos x \Rightarrow \begin{cases} x_1=2k\pi+\dfrac{\pi}{4} \\ x_2=2k\pi+\dfrac{5\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$$

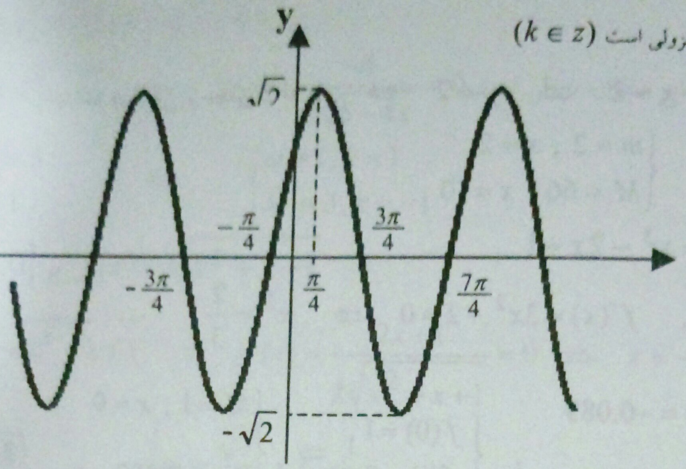
$$f''(x)=-\cos x-\sin x \Rightarrow \begin{cases} f''(x_1)<0 \\ f''(x_2)>0 \end{cases}$$

x_1 ماکزیممهای نسبی ومطلق

x_2 مینیممهای نسبی ومطلق

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π		$5\pi/4$		$3\pi/2$		$7\pi/4$		2π
$f'(x)$		+	•	-		-		-		-	•	+		+		+	
$f(x)$	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1	↘	0	↘	-1	↘	$-\sqrt{2}$	↗	-1	↗	0	↗	1

تابع دارای دوره تناوب $p = 2\pi$ می باشد و از شکل مشخص میشود که تابع دربازه‌های $\left[\left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}\right), 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right]$ صعودی و بر $\left[\left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right), 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right]$ نزولی است $(k \in z)$



12) $f(x) = x + \sin x$

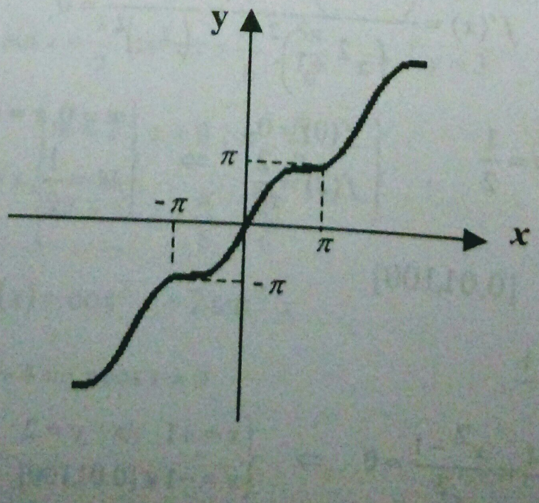
$f'(x) = 1 + \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = (2k+1)\pi \quad \Rightarrow \quad x = \pi, 3\pi, 5\pi$

$f''(x) = \sin x = 0$ از آزمون مشتق نمی‌توان استفاده کرد

x	0		π		2π
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	0	↗	π	↗	2π

$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1 \\ b = \lim\limits_{x\to\infty}(y - mx) = \lim\limits_{x\to\infty}(x + \sin x - x) = \text{حد ندارد} \end{cases}$$

→ مجانب مایل ندارد



❖ اکسترممهای مطلق تابع داده شده بر بازهٔ ذکر شده را بیابید.

13) $f(x)=x^2-4x+6$ بر $[-3,15]$

حل:

$f(x)=x^2-4x+6$

$f'(x)=2x-4=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow m=2$ مینیمم موضعی و مطلق

$M=f(10)=66 \Rightarrow \begin{cases} m=2\ ,\ x=2 \\ M=66\ ,\ x=10 \end{cases}$

14) $[0,1]$ بر $f(x)=x^3-2x+1$

حل:

$f(x)=x^3-2x+1 \quad , \quad f'(x)=3x^2-2=0 \Rightarrow x^2=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow y=-0.089 \\ x=-\sqrt{\frac{2}{3}} \notin [0,1] \end{cases} , \begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M=1\ ,\ x=0 \\ m=-0.089\ ,\ x=\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$

15) $[-15,10]$ بر $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$

حل:

$f(x)=\left|x^2-3x+2\right| , f'(x)=\frac{\left|\left(x^2-3x+2\right)(2x-3)\right|}{\left|x^2-3x+2\right|}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow y=0 \\ x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=\frac{3}{2} \Rightarrow y=+\frac{1}{4} \end{cases}$

$f(-10)=132 \quad , \quad f(10)=72 \Rightarrow \begin{cases} m=0\ ,\ x=102 \\ M=132\ ,\ x=-10 \end{cases}$

16) $[0,2]$ بر $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

حل:

$f(x)=\frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{\left(x^2+1\right)-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=+1 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \\ x=-1 \notin [0,2] \end{cases} , \begin{cases} f(0)=0 \\ f(2)=\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=0, x=0 \\ M=\frac{1}{2}, x=+1 \end{cases}$

17) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ بر $[0.01,100]$

حل:

$f(x)=x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}$

$f'(x)=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=+1 \Rightarrow y=2 \\ x=-1 \notin [0.01,100] \end{cases}$

$$f(0.01)=100.01 \quad f(100)=100.01 \Rightarrow \begin{cases} m=2,\ x=+1 \\ M=100.01\ ,\ x=100,0.01 \end{cases}$$

18) $[-1,1]$ بر $f(x)=\sqrt{5-4x}$

حل:

$$f(x)=\sqrt{5-4x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-4}{2\sqrt{5-4x}}<0$$ تابع همواره نزولی است

$$\begin{cases} f(-1)=3 \\ f(1)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1,\ x=1 \\ M=3,\ x=-1 \end{cases}$$

19) $[-1,0]$ بر $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

حل:

$$f(x)=\sqrt{x^2+x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(-1)=1 \quad f(0)=1 \Rightarrow \begin{cases} m=\frac{\sqrt{3}}{2},\ x=-\frac{1}{2} \\ M=1\ ,\ x=-1,0 \end{cases}$$

20) $[-2,1]$ بر $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}$

حل:

$$f(x)=\sqrt{2-x-x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{-2x-1}{2\sqrt{2-x-x^2}}=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{3}{2}$$

$$f(-2)=0 \quad f(1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0\ ,\ x=-2\ ,\ 1 \\ M=\frac{3}{2}\ ,\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

21) $[0,\pi]$ بر $f(x)=4\sin x+2\cos 2x$

حل:

$$f(x)=4\sin x+2\cos 2x \Rightarrow f''(x)=4\cos x-4\sin 2x=0$$

$$\Rightarrow 4\cos x-8\cos x\sin x=0 \Rightarrow 4\cos x(1-2\sin x)=0$$

$$\begin{cases} 4\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow y=2 \\ 1-2\sin x=0 \Rightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{5\pi}{6} \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

$$f(0)=2 \quad f(\pi)=2 \Rightarrow \begin{cases} m=2\ ,\ x=0\ ,\ \pi\ ,\ \frac{\pi}{2} \\ M=3\ ,x=\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

22) $\left[\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{3\pi}{4}\right]$ بر $f(x)=\cos^2 x+2\sin^2 x$

حل:

$$f'(x)=-2\sin x\cos x+4\sin x\cos x=0$$

$$\Rightarrow\ 2\sin x\cos x=0\ \Rightarrow\ \sin 2x=0\ \Rightarrow\ 2x=0\ ,\ \pi\ \Rightarrow \begin{cases} x=0\notin\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right] \\ x=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ y=2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2} \\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3}{2} \end{matrix}\ \Rightarrow \begin{cases} m=\frac{3}{2}\ ,\ x=\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{3\pi}{4} \\ M=2,\ x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

23) $[1,2]$ بر $f(x)=\sin x^2$

حل:

$$f(x)=\sin x^2\ \Rightarrow\ f'(x)=2x\cdot\cos x^2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0\ \Rightarrow\ y=0 \\ \cos x^2=0\ \Rightarrow \begin{cases} x^2=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \Rightarrow\ y=1 \\ x^2=\frac{3\pi}{2}\notin[1,2] \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} f(1)=\sin 1 \\ f(2)=\sin 4\cong 0.76 \end{matrix}\ \Rightarrow \begin{cases} m=\sin 4\ ,\ x=2 \\ M=1,\ x=\sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

24) $[0,2\pi]$ بر $f(x)=\sin(\sin x)$

حل:

$$f(x)=\sin(\sin x)\ ,\ f'(x)=\cos x\cos(\sin x)=0\ \Rightarrow \begin{cases} \cos x=0 \\ \cos(\sin x)=0 \end{cases}$$

$$\cos x=0\ \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ y=\sin 1 \\ x=\frac{3\pi}{2}\ \Rightarrow\ y=\sin(-1) \end{cases}\ ,\quad \cos(\sin x)=0\Rightarrow \begin{cases} \sin x=\frac{\pi}{2} \\ \sin x=\frac{3\pi}{2} \end{cases}\ \text{غ.ق.ق}$$

$$\begin{matrix} f(0)=0 \\ f(2\pi)=0 \end{matrix}\ \Rightarrow \begin{cases} m=\sin(-1)\ ,\ x=\frac{3\pi}{2} \\ M=\sin(1)\ ,\ x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

25) نشان دهید هرگاه $f(x)$ تابع زوجی با ماکزیمم (مینیمم) موضعی در $x=c$ آنگاه $f(x)$ در $x=-c$ نیز ماکزیمم (مینیمم) موضعی دارد.

حل: فرض می‌کنیم $f(x)$ تابع زوج باشد که در نقطهٔ $x=c$ اکسترمم موضعی دارد. پس داریم:

$$f(x)=f(-x)\ \Rightarrow \begin{cases} M=f(c)\ \text{یا}\ m=f(x) \\ M=f(-c)\ \text{یا}\ m=f(-c) \end{cases}$$

پس نتیجه می‌گیریم $f(x)$ در نقطهٔ $x=-c$ نیز اکسترمم موضعی دارد و در مسأله 5 مشاهده می‌شود که تابع زوج $f(x)=x^4-4x^2+4$ در $x=\pm\sqrt{2}$ اکسترمم موضعی $f(\pm\sqrt{2})=0$ دارد.

26) نشان دهید هرگاه $f(x)$ تابع فردی با ماکزیمم (مینیمم) موضعی در $x=c$ باشد، آنگاه $f(x)$ در $x=-c$ مینیمم (ماکزیمم) موضعی می‌باشد.

حل: $f(x)$ تابعی فرد است در نتیجه داریم:

$$f(-x)=-f(x)$$

$$\begin{cases} m=f(c) \text{ یا } M=f(c) \\ m=-f(c) \text{ یا } M=-f(c) \end{cases}$$

پس نتیجه می‌گیریم تابع در نقطهٔ $x=-c$ اکسترمم موضعی دارد و در مسأله (6) تابع فرد $f(x)=x+\frac{1}{x}$ در نقطهٔ $x=\pm1$ اکسترمم موضعی دارد بطوریکه: $f(-1)=-2\ ,\ f(1)=2$

27) چه مقداری از c ماکزیمم تابع $f(x)=\left|x^2+c\right|$ بر بازهٔ $[-1,1]$ را مینیمم می‌کند؟

حل:

$$f(x)=\left|x^2+c\right| \Rightarrow f'(x)=\frac{(x^2+c)(2x)}{\left|x^2+c\right|}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+c=0 \Rightarrow x=\pm c \Rightarrow f(\pm c)=2c \\ 2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=c \end{cases} \text{ ماکزیمم تابع}$$

$$f(1)=\left|1+c\right| \qquad [-1,1] \text{ مینیمم بر } \Rightarrow \left|1+c\right|=2c \Rightarrow 1+c=-2c \Rightarrow c=-\frac{1}{3}$$

28) فرض کنید f بر بازهٔ I پیوسته بوده و f در دو نقطهٔ s و t از I ماکزیمم موضعی اکید داشته باشد. نشان دهید f باید در نقطه‌ای بین s و t مینیمم موضعی (نه لزوماً اکید) داشته باشد.

حل: فرض می‌کنیم $s<t$ باشد پس چون f در s دارای ماکزیمم موضعی اکید است لذا عددی مانند δ وجود دارد که f بر $(s-\delta,s)$ اکیداً صعودی و بر بازهٔ $(s,s+\delta)$ اکیداً نزولی است. و عددی مانند δ' وجود دارد که f بر $(t-\delta',t)$ اکیداً صعودی و بر $(t,t+\delta')$ اکیداً نزولی است.

چون f بر $(s,s+\delta)$ نزولی اکید و بر $(t-\delta',t)$ اکیداً صعودی است و بر بازهٔ (s,t) پیوسته است لذا نقطه‌ای مانند x_0 وجود دارد که f در آن تغییر یکنوایی می‌دهد یعنی f در x_0 دارای مینیمم موضعی است.

❖ **تمام نقاط عطف تابع داده شده را بیابید.**

1) $f(x)=\sin x$

حل: $f'(x)=\cos x \ , \ f''(x)=-\sin x=0 \ \Rightarrow \ x=k\pi \ \ (k\in Z)$

$f'''(x)=-\cos x \xrightarrow{x=k\pi} f'''(x)\neq 0$

طبق آزمون مشتق سوم برای نقطهٔ عطف داریم: $f'''(x)\neq 0$ پس در نقاط $(k\in Z)\ x=k\pi$ نقطهٔ عطف داریم

2) $f(x)=\cos x$

حل: $f'(x)=-\sin x \ , \ f''(x)=-\cos x=0 \ \Rightarrow \ x=k\pi+\dfrac{\pi}{2} \quad (k\in Z)$

$f'''(x)=\sin x \xrightarrow{x=k\pi+\frac{\pi}{2}} f'''(x)\neq 0$

طبق آزمون نقطهٔ عطف در نقاط $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $(k\in Z)$ نقطهٔ عطف داریم

3) $f(x)=\cot x$

حل: $f'(x)=-\left(1+\cot^2 x\right) \ , \ f''(x)=-2\left(1+\cot^2 x\right)\cot x=0 \ \Rightarrow \ -2\cot x\cdot\csc^2 x=0$

$\Rightarrow \ -2\times\dfrac{\cos x}{\sin x}\times\dfrac{1}{\sin^2 x}=0 \ \Rightarrow \ \dfrac{-2\cos x}{\sin^3 x}=0 \ \Rightarrow \ x=k\pi+\dfrac{\pi}{2} \ , \ (k\in Z)$

$f'''(x)=2\left(1+\cot^2 x\right)^2+4\cot^2 x\left(1+\cot^2 x\right)\xrightarrow{x=k\pi+\frac{\pi}{2}} f'''(x)\neq 0$

طبق آزمون مشتق سوم نقطهٔ عطف در نقاط $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $(k\in Z)$: نقطهٔ عطف داریم

4) $f(x)=\tan x$

حل: $f'(x)=\left(1+\tan^2 x\right)=0 \ \Rightarrow \ 2\dfrac{\sin x}{\cos x}\times\dfrac{1}{\cos^2 x}=0 \ \Rightarrow \ 2\sin x=0 \ \Rightarrow \ x=k\pi \quad (k\in Z)$

$f'''(x)=2\left(1+\tan^2 x\right)^2+4\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)$

$f'''(x)$ به ازای $x=k\pi \quad (k\notin Z)$ موجود و مخالف صفر است. پس طبق آزمون مشتق سوم عطف نقاط $x=k\pi \quad (k\notin z)$ عطف است.

5) $f(x)=\sec x$

حل:

$f'(x)=\sec x-\tan x$

$f''(x)=\sec x-\tan^2 x+\sec x(1+\tan^2 x)$

$\Rightarrow f''(x)=\dfrac{1}{\cos x}\times\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin^2 x+1}{\cos^3 x}=0$

$\Rightarrow \ \sin^2 x+1=0 \ \Rightarrow$ جواب ندارد $\Rightarrow$ نقطهٔ عطف ندارد

6) $f(x)=\csc x$

حل:

$f'(x)=-\csc x-\cot x \ , \ f''(x)=\csc x\cot^2 x+\csc x\left(1+\cot^2 x\right)$

$$f''(x)=\frac{1}{\sin x}\times\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin x}\times\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}=0$$

$\Rightarrow\ 1+\cos^2 x=0 \Rightarrow$ جواب ندارد $\Rightarrow$ نقطهٔ عطف ندارد

7) $f(x)=\tan x+\cot x$

حل:

$$f'(x)=\left(1+\tan^2 x\right)-\left(1+\cot^2 x\right)$$

$$f''(x)=2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)+2\cot x\left(1+\cot^2 x\right)=2\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{1}{\cos^2 x}+2\frac{\cos x}{\sin x}\times\frac{1}{\sin^2 x}=0$$

$$\Rightarrow\ 2\sin x+2\cos x=0 \Rightarrow \sin x=-\cos x \Rightarrow \tan x=-1 \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4}$$

$$f'''(x)=2\left(1+\tan^2 x\right)^2+4\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)-2\left(1+\cot^2 x\right)-4\cot^2 x\left(1+\cot^2 x\right)$$

$$\xrightarrow{x=k\pi-\frac{\pi}{4}} f'''(x)=0$$

پس آزمون مشتق سوم بی‌حاصل است و از آزمون مشتق دوم نتیجه می‌گیریم تابع نقطهٔ عطف ندارد.

8) $f(x)=x+\sin x$

حل:

$$f'(x)=1+\cos x \quad , \quad f''(x)=-\sin x=0 \Rightarrow x=k\pi \quad (k\in Z)$$

$$f'''(x)=-\cos x \xrightarrow{x=k\pi} f'''(x)\neq 0$$

طبق آزمون مشتق سوم عطف چون $f'''(x)\neq 0$ پس در نقاط $x=k\pi$ ، $(k\in Z)$ دارای نقطهٔ عطف است.

9) نشان دهید که آزمون مشتق سوم برای نقطهٔ عطف در صورت صفر بودن مشتق سوم بی‌حاصل است.

حل: برای نشان دادن این مطلب رفتارهای دو تابع $f(x)=x^4$ و $g(x)=x^5$ را با هم مقایسه می‌کنیم و فرض می‌کنیم که هرگاه $f'''(c), f''(c)=0$ موجود و مساوی با صفر باشد آنگاه f در c نقطهٔ عطف نداشته باشد.

$$f(x)=x^4 \quad , \quad f'(x)=4x^3 \Rightarrow f''(x)=12x^2=0 \Rightarrow x=0$$

$$f'''(x)=24x \Rightarrow f'''(0)=0 \xrightarrow{\text{طبق فرض اولیه}}$$ در $x=0$ عطف نداریم

و ما می‌دانیم که در تابع $f(x)=x^4$ نقطهٔ عطف نداریم پس این با فرض ما مطابقت دارد ولی:

$$g(x)=x^5$$

$$g'(x)=5x^4 \Rightarrow g''(x)=20x^3=0 \Rightarrow x=0$$

$$g'''(x)=60x^2 \Rightarrow g'''(0)=0 \xrightarrow{\text{طبق فرض اولیه}}$$ $x=0$ نقطهٔ عطف نیست

در صورتی که ما می‌دانیم تابع $g(x)=x^5$ در نقطهٔ $x=0$ عطف دارد پس فرض اولیه ما نادرست است و ما نمی‌توانیم در مواردی که مشتق دوم در نقطهٔ عطف برابر صفر می‌شود دربارهٔ آن اظهار نظر کنیم.

❖ تمام اکسترممهای موضعی و نقاط عطف تابع داده شده را بیابید. تابع بر چه بازه‌هایی صعودی است؟ نزولی است؟ به بالا مقعر است؟ به پایین مقعر است؟ تابع را رسم کنید.

10) $f(x)=x^{2/3}$

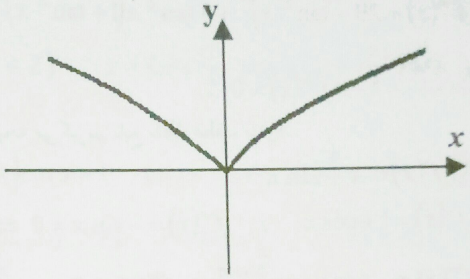
حل:

$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}=0 \Rightarrow x=0$ نقطهٔ بحرانی

$f''(x)=\frac{-2}{9}x^{-4/3}=\frac{-2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}<0 \Rightarrow$ تابع همواره تقعر به سمت پایین دارد

پس نقطهٔ عطف ندارد و طبق آزمون مشتق دوم $(0و0)$ مینیمم تابع می‌باشد.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



تابع در بازهٔ $(-\infty,0]$ نزولی و از $[0,+\infty)$ صعودی است.

11) $f(x)=x^{5/3}$

حل:

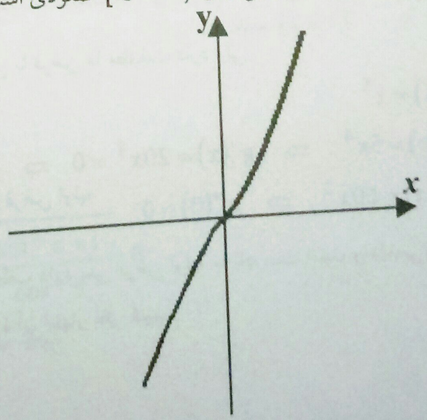
$f'(x)=5/3\,x^{2/3}=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$

$f''(x)=10/9\,x^{-1/3}=0 \Rightarrow x=0$

$\Rightarrow f''(x)=10/9\,x^{-1/3}=\begin{cases} f''(x)\geq 0 \ , \ x\geq 0 \rightarrow \text{تقعر به بالا} \\ f''(x)\leq 0 \ , \ x\leq 0 \rightarrow \text{تقعر به پایین} \end{cases} \Rightarrow (0,0)$ نقطهٔ عطف است

تابع در بازهٔ $(-\infty و0]$ نزولی و از $[0و+\infty)$ صعودی است.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			+		
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$



12) $f(x)=2+x-x^2$

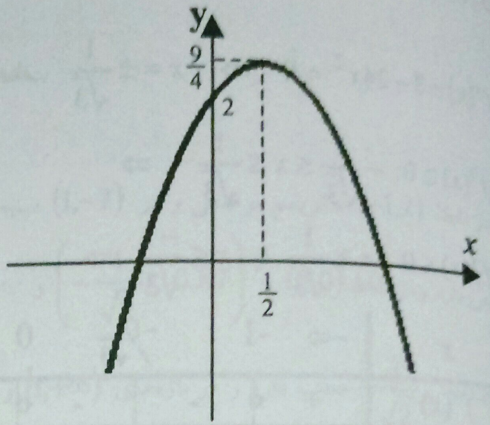
حل:

$f'(x)=1-2x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \ , \ y=\frac{9}{4}$

$f''(x)=-2<0 \rightarrow$ تابع همواره تقعر رو به پایین دارد و نقطهٔ عطف ندارد

نقطهٔ ماکزیمم تابع است $\left(\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right)$ و طبق آزمون دوم مشتق نقطهٔ $\left(\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right)$ ماکزیمم تابع است.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{9}{4}$	↘	$-\infty$

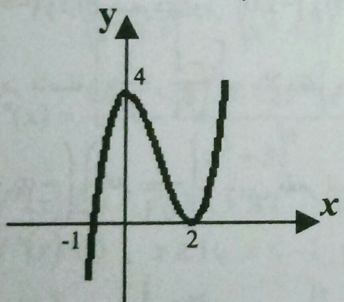


13) $f(x)=x^3-3x^2+4$

$f'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \ , \ y=4 \\ x=2 \ , \ y=0 \end{cases}$ نقاط بحرانی

$f''(x)=6x-6 \Rightarrow \begin{cases} f''(x)\geq 0 \ , \ x\geq 1 \rightarrow \text{تقعر به بالا} \\ f''(x)\leq 0 \ , \ x\leq 1 \rightarrow \text{تقعر به پایین} \end{cases} \Rightarrow$ تابع در نقطهٔ $(1,2)$ عطف دارد

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	2	↘	0	↗	$+\infty$



تابع ماکزیمم موضعی در $(0,4)$ و مینیمم موضعی در $(2,0)$ دارد و در نقطهٔ $(1,2)$ عطف دارد و تابع بر $(-\infty,0]$ و $[2,+\infty)$ صعودی و بر $[0,2]$ نزولی است.

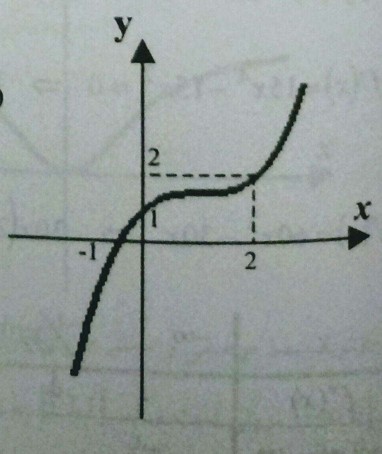
14) $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+1$

$f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{6}{4}x+\frac{3}{2}=\frac{3}{8}(x^2-4x+4)=\frac{3}{8}(x-2)^2\geq 0$

$f''(x)=\frac{6}{8}x-\frac{6}{4}=0 \Rightarrow x=2$ نقطهٔ عطف

$\begin{cases} f''(x)\geq 0 \ , \ x\geq 2 \Rightarrow \text{تقعر به بالا} \\ f''(x)\leq 0 \ , \ x\leq 2 \Rightarrow \text{تقعر به پایین} \end{cases}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$



تابع فرد و همواره صعودی است

15) $f(x)=4x^2-2x^4$

حل:

$$f'(x)=8x-8x^3=0 \Rightarrow 8x(1-x^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0\ ,\ y=0 \\ x=1\ ,\ y=2 \\ x=-1\ ,\ y=2 \end{cases}$$ نقاط بحرانی

$$f''(x)=8-24x^2=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$ نقاط عطف

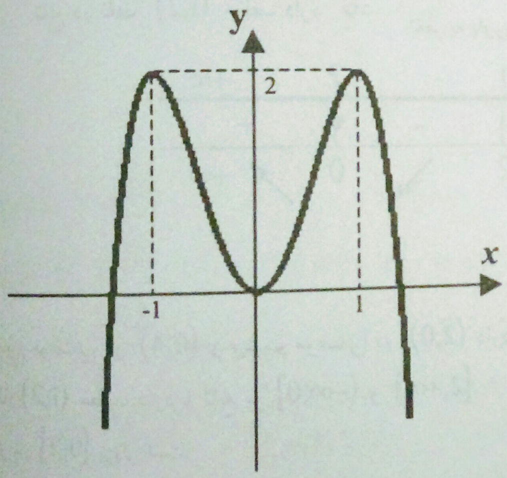
$$\begin{cases} f''(x)\geq 0,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\leq x\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \\ f''(x)\leq 0\ ,\ x\geq \frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{یا}\ x\leq \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \end{cases}$$

تقعر به بالا

تقعر به پایین

x	$-\infty$		-1		$-1/\sqrt{3}$		0		$1/\sqrt{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$10/9$	↘	0	↗	$10/9$	↗	2	↘	$-\infty$

تابع ماکزیمم موضعی و مطلق در نقاط $(1,2),(-1,2)$ و مینیمم موضعی در نقطهٔ $(0,0)$ و نقاط عطف در $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ داردوهمچنین تابع بر بازه های $(-\infty,-1],[0,1]$ صعودی وبر $[-1,0],[1,\infty)$ نزولی است.ودر فاصلهٔ $\left[\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ به بالا مقعر ودر فاصله های $\left(-\infty,\frac{-1}{\sqrt{3}}\right],\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$ به پایین مقعر است.



16) $f(x)=3x^5-5x^3$

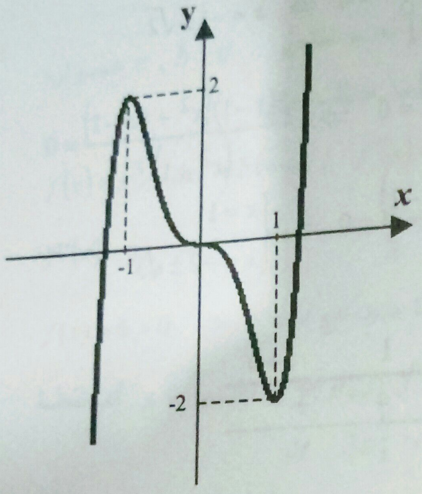
حل:

$$f'(x)=15x^4-15x^2=0 \Rightarrow 15x^2(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0\ ,\ y=0 \\ x=1\ ,\ y=-2 \\ x=-1\ ,\ y=2 \end{cases}$$ نقاط بحرانی

$$f''(x)=60x^3-30x \Rightarrow 30x(2x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$ نقاط عطف تابع

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
جهت تقعر تابع		پایین		بالا		پایین		بالا	

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		-		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	$+\infty$



تابع در نقطهٔ $(-1,2)$ ماکزیمم موضعی و در $(1,-2)$ مینیمم موضعی دارد و در نقاط $(0,0)$ و $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0.87\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ -0.87\right)$ عطف دارد و در بازه‌های $(-\infty,-1]$ و $[1,+\infty)$ صعودی و در بازهٔ $[-1,1]$ نزولی است.

17) $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+3}$

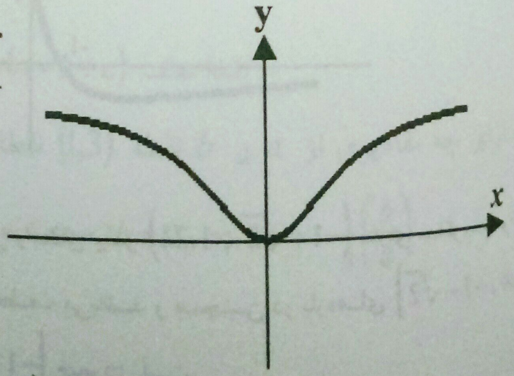
حل:

$$f'(x)=\frac{6x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{18x}{\left(x^2+3\right)^2}=0 \Rightarrow x=0$$

$$f''(x)=\frac{18\left(x^2+3\right)^2-72x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+3\right)^4}=\frac{54\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+3\right)^3}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=+1 \\ x=-1 \end{cases}$$ نقاط عطف

$$\begin{cases} f''(x)\geq 0\ ,\ -1\leq x\leq 1 \Rightarrow \text{تقعر به بالا} \\ f''(x)\leq 0\ ,\ x\geq 1\ \text{یا}\ x\leq -1 \Rightarrow \text{تقعر به پایین} \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	0	↗	



تابع دارای مینیمم موضعی و مطلق در $(0,0)$ و نقاط عطف $\left(1,\frac{3}{4}\right)$ و $\left(-1,\frac{3}{4}\right)$ می‌باشد و بر بازهٔ $[0,\infty)$ صعودی و بر $(-\infty,0]$ نزولی است و در $[-1,1]$ به بالا مقعر و در $(-\infty,-1]$ و $[1,\infty)$ به پایین مقعر می‌باشد.

18) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$

حل:

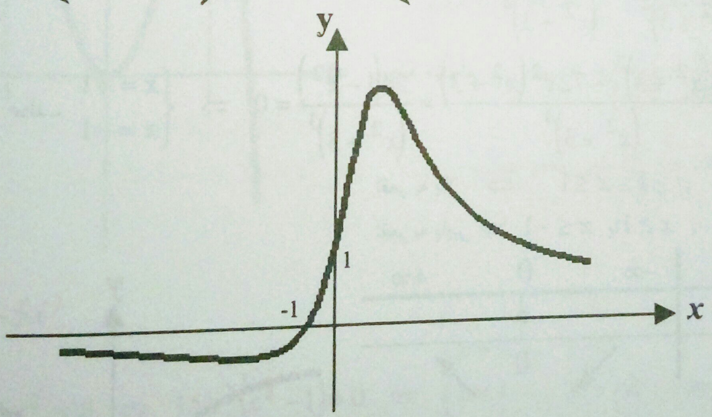
$$f(x)=\frac{(x^2+1)-2x(x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}=-\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$$

$$f''(x)=\frac{(-2x-2)(x^2+1)^2-4x(x^2+1)(-x^2-2x+1)}{(x^2+1)^3}=0 \Rightarrow \frac{2(x-1)(x^2+4x-1)}{(x^2+1)^3}=0$$

$$f''(x)=\frac{2x^3+6x^2-6x-2}{(x^2+1)^3}=0 \Rightarrow \frac{2(x-1)(x^2+4x-1)}{(x^2+1)^3}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2\pm\sqrt{3} \end{cases}$$ نقاط عطف

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		1		$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+	
جهت تقعر تابع	پایین	-0.18	بالا	0.68	پایین	1	بالا	

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-		+		-	
$f(x)$	0	↘	-0.21	↗	1.21	↘	0



تابع در نقطهٔ $(-1-\sqrt{2}\ ,\ -0.21)$ دارای مینیمم موضعی و مطلق و در $(-1+\sqrt{2}\ ,\ 1.21)$ دارای ماکزیمم موضعی مطلق است و در نقاط $x=-2\pm\sqrt{3}$ و $x=0$ دارای عطف می‌باشد و همچنین در بازه‌های $(-\infty, -1-\sqrt{2}]$ و $[-+\sqrt{2}\ ,\ +\infty)$ نزولی و در بازهٔ $[-1-\sqrt{2}\ ,\ -1+\sqrt{2}]$ صعودی است.

19) نشان دهید که تابع $f(x)=x^2+ax+b$، بی‌توجه به مقادیر a و b نقطهٔ عطف ندارد آیا این مطلب در مورد تابع $g(x)=x^4+ax+b$ نیز درست است؟

حل:

$f(x)=x^2+ax-b$, $f'(x)=2x+a=0$, $f''(x)=2>0$

چون $f''(x)$ همواره مثبت است پس تقعر همواره به سمت بالا است و تغییر تقعر نداریم پس نقطهٔ عطف نداریم.

$g(x)=x^4+ax+b \quad , \quad g'(x)=4x^3+a \quad , \quad g''(x)=12x^2=0 \Rightarrow x=0$

$g'''(x)=6x \xrightarrow{x=0} g'''(x)=0$

طبق قانون دوم عطف چون $g'''(x)=0$ است پس در این تابع نیز نقطهٔ عطف نداریم.

20) نشان دهید که تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$، بی‌توجه به مقادیر a , b , c همواره نقطهٔ عطف دارد. f به ازای چه مقداری از a در $x=1$ نقطهٔ عطف دارد؟

حل:

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \quad , \quad f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f''(x)=6x+2a=0 \Rightarrow x=-\frac{a}{3}$ نقطهٔ عطف

$f(x)=6>0 \Rightarrow$ نقطهٔ عطف تابع است $x=-\frac{a}{3}$ طبق قانون دوم $\Rightarrow \quad x=-\frac{a}{3}=1 \Rightarrow a=-3$

21) نشان دهید که تابع $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$، بی‌توجه به مقادیر c و d، نقطهٔ عطف ندارد اگر $3a^2\le 8b$ و دو نقطهٔ عطف دارد اگر $3a^2>8b$.

حل:

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d \quad , \quad f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

$f''(x)=12x^2+6ax+2b=0 \Rightarrow \Delta=\sqrt{36a^2-96b}$

اگر $36a^2-96b\ge 0 \Rightarrow 3a^2\ge 8b \Rightarrow$ دو نقطهٔ عطف دارد

اگر $36a^2-96b<0 \Rightarrow 3a^2<8b \Rightarrow$ نقطهٔ عطف ندارد

22) نقطهٔ عطف تابع $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ کجاست؟

حل:

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$

$f(x)=x^3-x^2(a+b+c)+x(ab+bc+ac)-abc$

$f'(x)=3x^2-2x(a+b+c)+ab+bc+ac$

$f''(x)=6x-2(a+b+c)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}(a+b+c)$ نقطهٔ عطف

23) به ازای چه مقادیری از a و b نقطهٔ $(1,3)$ نقطهٔ عطف منحنی $y=ax^3+bx^2$ است؟

حل:

$y=ax^3+bx^2 \quad , \quad y'=3ax^2+2bx \quad , \quad y''=6ax+2b=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)$

$\Rightarrow 1=-\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow b=-3a \qquad (1)$

$y=ax^3+bx^2$

نقطهٔ عطف $(1,3)$ در خود تابع نیز صدق می‌کند.

$3=a+b \qquad (2)$

$(1),(2) \Rightarrow a=\frac{-3}{2} \quad , \quad b=\frac{9}{2}$

حد داده شده را حساب کنید (ممکن است مساوی ∞ یا ∞- باشد).

1) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{5/3}$

$L=\lim\limits_{x\to\infty} x^{5/3}=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{3/4}$

$L=\lim\limits_{x\to0^+} x^{3/4}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}=\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{11/7}$

$L=\lim\limits_{x\to-\infty} x^{11/7}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[7]{x^{11}}=x\sqrt[7]{x^4}=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to0^-} x^{-7/11}$

$L=\lim\limits_{x\to0^-} x^{-7/11}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{\sqrt[11]{x^7}}=-\infty$

5) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2}{x^2-4}$

$L=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2}{x^2-4}=\infty$

6) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x+3}{x^2-9}$

$L=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x+3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x+3}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$

7) $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x^2+9}{x^2-9}$

$L=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x^2+9}{x^2-9}=\infty$

8) $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{6}{x^3+1}$

$L=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{6}{x^3+1}=\infty$

9) $\lim\limits_{x\to+1^-}\dfrac{2x+1}{x^3-1}$

$L=\lim\limits_{x\to+1^-}\dfrac{2x+1}{x^3-1}=-\infty$

10) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}}$

حل:

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-4}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} - \lim_{x\to 0^+} \frac{4}{\sqrt{x}} = -\infty$$

11) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{10}{x^3+2}$

حل:

$$L = \lim_{x\to -\infty} \frac{10}{x^3+2} = 0$$

12) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x^{2/3}}$

حل:

$$L = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x^{2/3}} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x^2}{x^{2/3}} + \frac{1}{x^{2/3}} \right) = \lim_{x\to 0^-} \left(x^{4/3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) = +\infty$$

13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x^2}$

حل:

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \infty$$

14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x^2}$

حل:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \times \lim_{x\to 0} \cos x = \infty$$

15) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan x}{x^{1.1}}$

حل:

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{x^{1.1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{x} \times \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{1/10}} = 1 \times \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[10]{x}} = \infty$$

16) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3-x}{2+x}$

حل:

$$L = \lim_{x\to \infty} \frac{3-x}{2+x} = -1$$

17) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1+x}{1-x^2}$

حل:

$$L = \lim_{x\to \infty} \frac{1+x}{1-x^2} = \lim_{x\to \infty} \frac{1+x}{(1+x)(1-x)} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{1-x} = 0$$

18) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1-x^2}{1+x}$

حل:

$$L = \lim_{x\to -\infty} \frac{1-x^2}{1+x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{(1+x)(1-x)}{1+x} = \lim_{x\to -\infty} (1-x) = +\infty$$

19) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-2}$

$$L=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-2}=2$$

20) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}$

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}=1$$

21) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}$

$$L=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=-\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{-1}{2}$$

22) هرگاه $f(x)=\dfrac{(x-1)}{(x+2)}$ ، آنگاه وقتی $x\to\pm\infty$ ، $f(x)\to1$. تمام x هایی را بیابید که $|f(x)-1|<0.01$.

$$f(x)=\frac{x-1}{x+2}$$

$$|f(x)-1|<\frac{1}{100}\Rightarrow\left|\frac{x-1}{x+2}-1\right|<\frac{1}{100}\Rightarrow\left|\frac{-3}{x+2}\right|<\frac{1}{100}\Rightarrow-\frac{1}{100}<\frac{-3}{x+2}<\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{-3}{x+2}\right|<\frac{1}{100}\Rightarrow-\frac{1}{100}<\frac{-3}{x+2}<\frac{1}{100}\ ,\ -\frac{3}{x+2}<\frac{1}{100}\Rightarrow-\frac{x+2}{3}>100$$

$$\Rightarrow x+2<-300\Rightarrow x<-302$$

$$\frac{-3}{x+2}>\frac{-1}{100}\Rightarrow-\frac{x+2}{3}<-100\Rightarrow x+2>300\Rightarrow x>298$$

23) هرگاه $f(x)=\dfrac{x}{(x-3)}$ ، آنگاه وقتی $x\to3^+$ ، $f(x)\to\infty$ و نیز وقتی $x\to3^-$ ، $f(x)\to-\infty$ تمام x هایی را بیابید که $f(x)>1000$ و نیز تمام x هایی را بیابید که $f(x)<-1000$.

حل: با فرض $x>3$

$$f(x)=\frac{x}{x-3}$$

$$f(x)>1000\Rightarrow\frac{x}{x-3}>1000\Rightarrow x>1000(x-3)\Rightarrow x<\frac{3000}{999}$$

با فرض $x<3$

$$f(x)<-1000$$

$$\frac{x}{x-3}<-1000 \Rightarrow x<-1000x+3000 \Rightarrow x<\frac{3000}{1001}$$

❖ حدهای داده شده را محاسبه کنید، هریک به صورت $0\times\infty$ است.

24) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-1/2}\left(x^{1/4}-1\right)$

حل: $L=\lim\limits_{x\to\infty} x^{-1/2}\left(x^{1/4}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt[4]{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$

25) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-2/3}\left(1-x^{2/3}\right)$

حل: $L=\lim\limits_{x\to\infty} x^{-2/3}\left(1-x^{2/3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^{-2/3}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1\right)=-1$

26) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{1/2}\left(1+x^{-3/4}\right)$

حل: $L=\lim\limits_{x\to0^+} x^{1/2}\left(1+x^{-3/4}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^{1/2}+x^{-1/4}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)=\infty$

27) $\lim\limits_{x\to0^-} x^{1/3}\left(4+x^{-2/3}\right)$

حل: $L=\lim\limits_{x\to0^-} x^{1/3}\left(4+x^{-2/3}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(4x^{1/3}+x^{-1/3}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(4\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)=-\infty$

28) $\lim\limits_{x\to0} x\cdot\cot x$

حل: $L=\lim\limits_{x\to0} x\cdot\cot x=\lim\limits_{x\to0} x\cdot\frac{1}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=1$

29) $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\cdot\csc x$

حل: $L=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\cdot\csc x=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$

30) $\lim\limits_{x\to0^+} x\cdot\sqrt{\csc x}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to0^+} x\cdot\sqrt{\csc x}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{x}{\sin x}}=0$

31) هر تابع کراندار بر بازه‌ای از نوع (c,∞) را نزدیک ∞ کراندار می‌نامیم، و هر تابع کراندار بر بازه‌ای از نوع $(-\infty,c)$ را نزدیک $-\infty$ کراندار می‌نامیم. نشان دهید هرگاه $f(x)$ نزدیک ∞ کراندار بوده و وقتی $x\to\infty$، $g(x)\to0$، آنگاه وقتی $x\to\infty$، $f(x)g(x)\to0$، و همین امر در صورت تعویض ∞ با $-\infty$ درست است.

حل: فرض می‌کنیم $f(x)$ نزدیک ∞ کراندار است در اینصورت در بازه‌ای مانند (c,∞) داریم:

$$\forall \ x>c: |f(x)|\le M$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$$

عددی مانند c' وجود دارد که

اگر $x<c' \Rightarrow |g(x)|<\frac{\varepsilon}{M}$

حال $c''=\max\{c,c'\}$ آنگاه

اگر $x>c'' \Rightarrow |f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

یعنی:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)=0$$

❖ **حدهای داده شده را در صورت وجود به کمک مسئله ۳۱ حساب کنید.**

32) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$

حل: $L=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin x$ حد ندارد

33) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}0\cdot(\text{حد کراندار})=0$

34) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\cos x=0$

35) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin x+\cos x}{x^{1/3}}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\sin x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\cos x\right)=0+0=0$

36) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x^2}{x}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x^2=0$

37) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=0\times0=0$

38) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}$

حل: $L=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}=0\times1=0$

39) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\cos x}}{x}$

حل: $L=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\cos x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\cos x}=$ وجود ندارد ($\sqrt{\cos x}$ کراندار نیست)

40) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\tan x}{x}$

حل: $L=\lim_{x\to-\infty}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\tan x=$ وجود ندارد ($\tan x$ کراندار نیست)

❖ حدهای داده شده را حساب کنید. هر کدام بصورت مبهم $\infty-\infty$ می‌باشد.

41) $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

حل: $L=\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-x+1}}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(x^2-x+1\right)}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$$

42) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

حل: $L=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right)}=\frac{3}{2}$$

43) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$

حل: $L=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4x}}$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-4x\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+4x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{1}{x}+4\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{1}{x}+4\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}}\right)} = -2$$

44) $\lim_{x\to-\infty}\left(x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

حل:

$$L = \lim_{x\to-\infty}\left(x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\frac{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = 0$$

45) $\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{x^2+1}-x^2\right)$

حل:

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{x^2+1}-x^2\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{x^2+1}-x^2\right)\cdot\frac{x\sqrt{x^2+1}+x^2}{x\sqrt{x^2+1}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(x^2+1\right)-x^4}{x\sqrt{x^2+1}+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2+1}+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

46) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$

حل:

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+(a+b)x+ab-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left[(a+b)+\frac{ab}{x}\right]}{x\left[\sqrt{1+\frac{(a+b)}{x}+\frac{ab}{x^2}}+1\right]} = \frac{a+b}{2}$$

47) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$

حل:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+x+1\right)-\left(x^2-x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=1$$

48) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

حل:

$$L=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+x-1\right)-\left(x^2-x+1\right)}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{|x|\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{-x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-2}{2}=-1$$

۱) تابع f را طوری مثال بزنید که دقیقاً n مجانب قائم داشته باشد.

حل:

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)\Lambda\,(x-n)}$$

❖ تمام مجانبهای (افقی و قائم) تابع داده شده را یافته و نمودار آن را رسم نمائید.

$$2)\ f(x)=\frac{2}{x-1}$$

حل:

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{2}{x-1}=\infty \Rightarrow x=1$ مجانب قائم

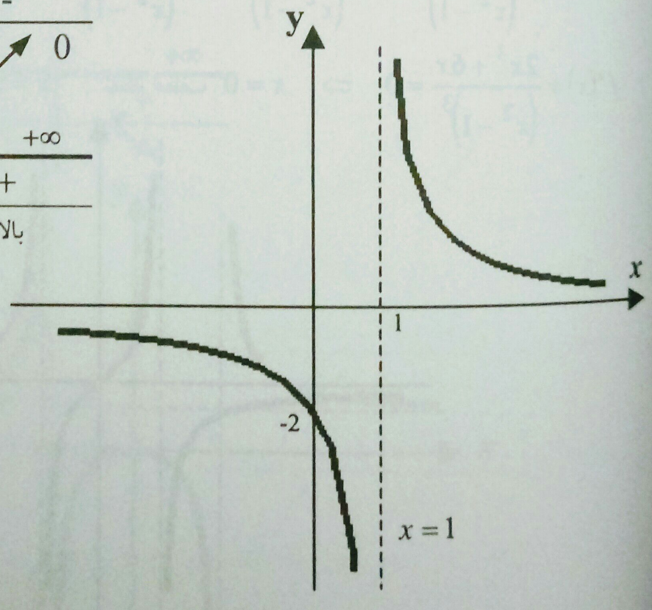
$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\frac{2}{x-1}=0 \Rightarrow y=0$ مجانب افقی

$f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2}<0 \Rightarrow$ تابع همواره نزولی است

$f''(x)=\frac{4}{(x-1)^3}=0 \Rightarrow x=1$ ریشه مشتق دوم

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-		-	
$f(x)$	0	↘ $-\infty$		$+\infty$ ↗	0

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
جهت تقعر	پایین		بالا



$$3)\ f(x)=\frac{x-4}{2x+4}$$

حل:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-4}{2x+4}=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}$ مجانب افقی

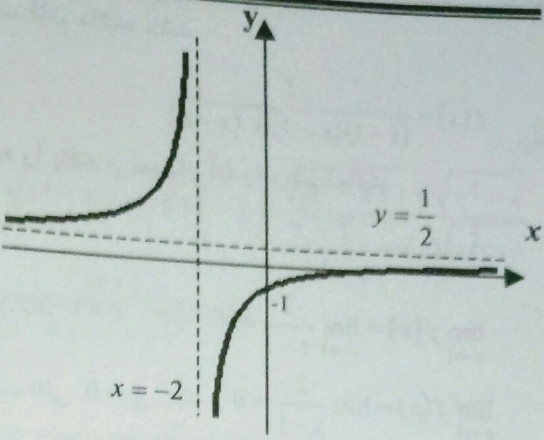
$\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x-4}{2x+4}=\infty \Rightarrow x=-2$ مجانب قائم

$f'(x)=\frac{(2x+4)-2(x-4)}{(2x+4)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{12}{(2x+4)^2}>0 \Rightarrow$ همواره صعودی است

$f''(x)=\frac{-48}{(2x+4)^2} \Rightarrow x=-2$ ریشهٔ دوم مشتق

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$\frac{1}{2} \nearrow +\infty$		$+\infty \nearrow \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$		$-$
جهت تقعر	بالا		پایین



حل:

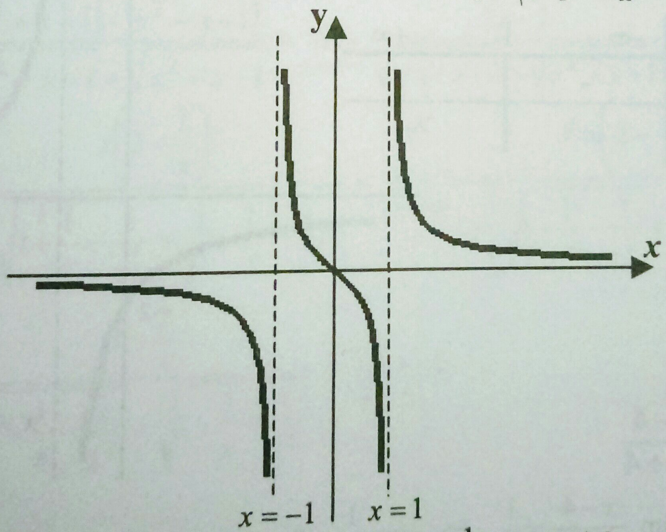
$$4)\ f(x)=\frac{x}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to\pm1}\frac{x}{x^2-1}=\infty \Rightarrow \begin{cases}x=+1\\ x=-1\end{cases}$$ مجانبهای قائم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0 \Rightarrow y=0$$ مجانبهای افقی

$$f'(x)=\frac{(x^2-1)-2x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}=-\frac{(x^2+1)}{(x^2-1)^2}<0 \rightarrow$$ تابع همواره نزولی است

$$f''(x)=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=0 \Rightarrow x=0$$ نقطهٔ عطف , $x=\pm1$ ریشه‌های دوم‌مشتق



x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$		$-$		$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow$	0	$\searrow -\infty$		$+\infty \searrow 0$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
جهت تقعر	پایین		بالا	0	پایین	.	بالا

5) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

حل:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-4}=1 \Rightarrow y=1$ مجانب افقی

$\lim\limits_{x\to\pm 2}\dfrac{x^2}{x^2-4}=\infty \Rightarrow x=\pm 2$ مجانبهای قائم

$f'(x)=\dfrac{2x(x^2-4)-2x^3}{(x^2-4)^2}=\dfrac{-8x}{(x^2-4)^2}=0 \Rightarrow x=0$ نقطهٔ بحرانی

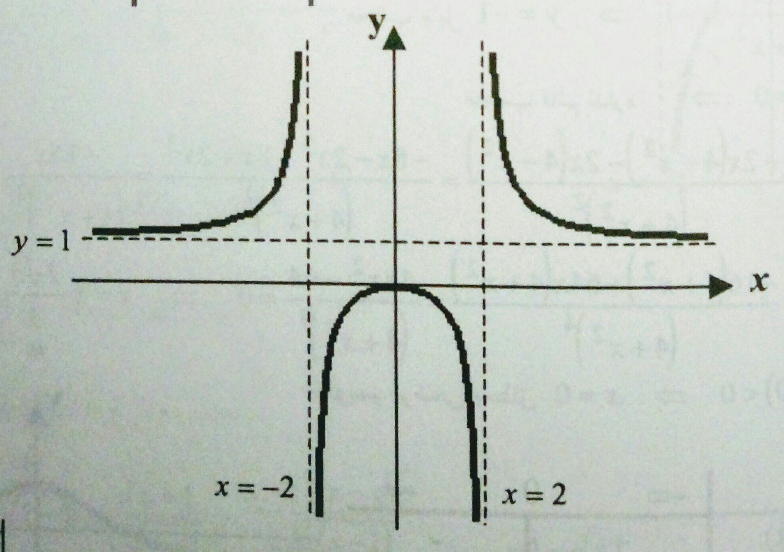
$f''(x)=\dfrac{-8(x^2-4)^2+32x^2(x^2-4)}{(x^2-4)^4}=\dfrac{-8x^2+32+32x^2}{(x^2-4)^3}=\dfrac{24x^2+32}{(x^2-4)^3}=0$

$\Rightarrow x=\pm 2$ ریشهٔ دوم مشتق

$f''(0)<0 \Rightarrow x=0$ ماکزیمم موضعی و مطلق

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	-		-	
$f(x)$	1	↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘	1

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f''(x)$		+		-		+	
جهت تقعر		بالا		پایین		بالا	



6) $f(x)=\dfrac{1+|x|}{x}$

حل:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+|x|}{x}=\infty \Rightarrow x=0$ مجانب قائم

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1+|x|}{x}=-1 \Rightarrow y=-1$ مجانب افقی

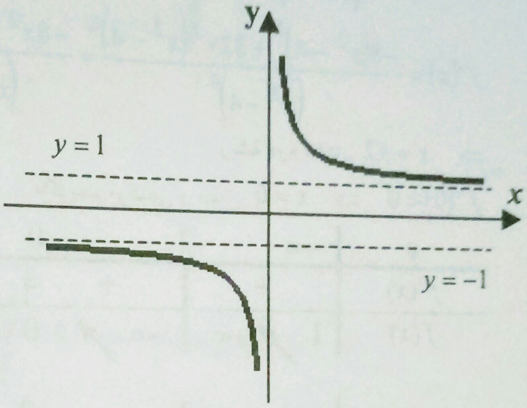
$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+|x|}{x}=+1 \Rightarrow y=+1$ مجانب افقی

$f(x)=\frac{1+|x|}{x} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1+x}{x}, & x>0\\ \frac{1-x}{x}, & x<0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^2}, & x>0\\ -\frac{1}{x^2}, & x<0\end{cases}$ $f'(x)<0$

$\rightarrow$ تابع نزولی است ، $f''(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3}, & x>0\\ \frac{2}{x^3}, & x<0\end{cases} \Rightarrow f''(x)=0 \Rightarrow x=0$ ریشهٔ دوم‌مشتق

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	-1 ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ 1

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
جهت تقعر	پایین		بالا



7) $f(x)=\frac{4-x^2}{4+x^2}$

حل:

$\lim_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{4+x^2}=-1 \Rightarrow y=-1$ مجانب مایل

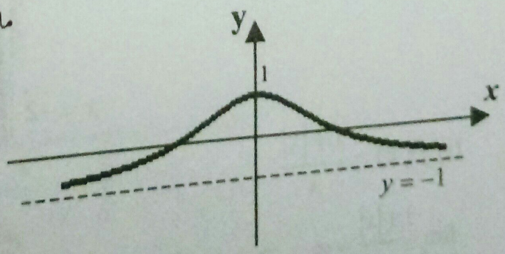
$4+x^2\neq 0 \Rightarrow$ مجانب قائم ندارد

$f'(x)=\frac{-2x(4+x^2)-2x(4-x^2)}{(4+x^2)^2}=\frac{-8x-2x^3-8x+2x^3}{(4+x^2)^2}=\frac{-16x}{(4+x^2)^2}=0 \Rightarrow x=0$ نقطه‌بحرانی

$f''(x)=\frac{-16(4+x^2)+64x(4+x^2)}{(4+x^2)^4}=\frac{48x^2-64}{(4+x^2)^3}=0 \Rightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ریشه‌های مشتق دوم

$f''(0)<0 \Rightarrow x=0$ ماکزیمم موضعی ومطلق

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	-1 ↗	1	↘ -1



x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}/3$		$-2\sqrt{3}/3$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
جهت تقعر	بالا	$1/2$	پایین	$1/2$	بالا

8) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad D_f:(-1,1)$

حل:

$\lim\limits_{x\to\pm1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\infty \Rightarrow x=\pm1$ مجانب‌های قائم

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-1 \Rightarrow y=-1$ مجانب افقی

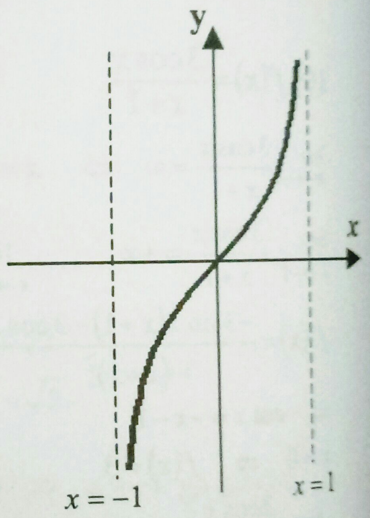
$f'(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\dfrac{1}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}\xrightarrow{\text{با توجه به } D_f} f'(x)>0 \Rightarrow$ همواره صعودی است

$f''(x)=\dfrac{6x\left(1-x^2\right)^2}{\left(1-x^2\right)^{\frac{7}{2}}}=\dfrac{6x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}=0 \Rightarrow x=0$ نقطهٔ عطف

$x=\pm1$ ریشهٔ مشتق دوم

x	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	-1 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ -1

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
جهت تقعر	پایین	0	بالا



9) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-1}}$ $\qquad D_f:x>1$

حل:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-1}}=1 \Rightarrow y=1$ مجانب افقی

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-1}}=\infty \Rightarrow x=1$ مجانب قائم

$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}=\dfrac{\dfrac{x-1-x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x-1)}}}{x-1}=\dfrac{-1-\sqrt{x}}{2(x-1)\sqrt{x(x-1)}}=-\dfrac{\left(1+\sqrt{x}\right)}{2(x-1)\sqrt{x^2-x}}$

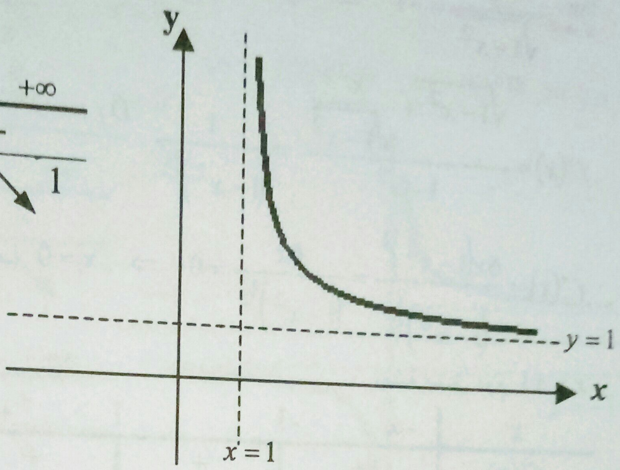
$=-\dfrac{\left(1+\sqrt{x}\right)}{2\left(1+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\sqrt{x^2-x}}=\dfrac{-1}{2\left(\sqrt{x}-1\right)\sqrt{x^2-x}}\xrightarrow{\text{با توجه } D_f} f'(x)<0$

مسائل صفحه ۳۱۲

$$f''(x)=\frac{-2\times\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\sqrt{x^2-x}+\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}\times\left(\sqrt{x}-1\right)\right]}{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(x^2-x\right)}=-\frac{\frac{x^2-x+(2x-1)\left(x-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{x^2-x}}}{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(x^2-x\right)}$$

$$f''(x)=-\frac{3x^2-2x-2x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(x^2-x\right)^{\frac{3}{2}}}=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}\notin Df$$ نقطهٔ عطف ندارد

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	||	-	
$f(x)$	1 ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1



حل: $D_f=R-\{1\}$

10) $f(x)=\dfrac{3\cos x}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3\cos x}{x+1}=\infty \Rightarrow x=-1$ مجانب قائم

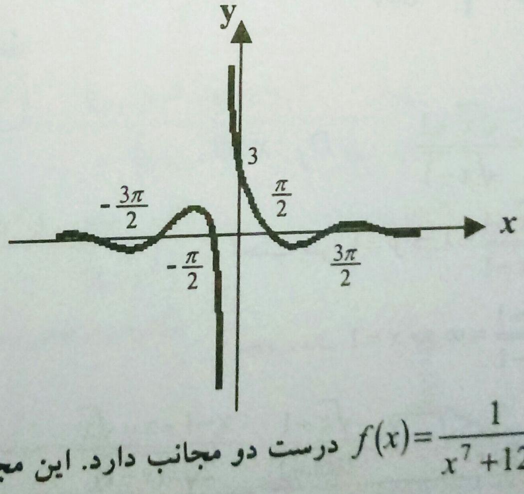
$\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{3\cos x}{x+1}=+\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3\cos x}{x+1}=-\infty$

$f'(x)=\dfrac{-3\sin x(x+1)-3\cos x}{(x+1)^2}=0 \Rightarrow -3(x\sin x+\sin x+\cos x)=0 \Rightarrow x+1+\cot x=0$

$\Rightarrow \cot x=-x-1$

$x=0 \Rightarrow f(x)=3$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3\cos x}{x+1}=0$



11) تابع $f(x)=\dfrac{1}{x^7+128}$ درست دو مجانب دارد. این مجانبها چیستند؟

حل:

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{x^7+128}=\infty \Rightarrow x=-2$ مجانب افقی

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^7+128}=0 \Rightarrow y=0$ مجانب قائم

❖ ابهام مربوط به حدهای داده شده را توصیف کنی. سپس ، با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، حد را حساب کنید.

$$1)\lim_{x\to 7}\frac{x^2-15x+56}{x^2-3x-28}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to 7}\frac{x^2-15x+56}{x^2-3x-28}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\Rightarrow L=\lim_{x\to 7}\frac{\frac{d}{dx}\left(x^2-15x+56\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2-3x-28\right)}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to 7}\frac{2x-15}{2x-3}=\frac{-1}{11}$$

$$2)\lim_{x\to -1}\frac{3x^3+3x^3+x+1}{x^2-1}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to -1}\frac{3x^3+3x^2+x+1}{x^2-1}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\Rightarrow L=\lim_{x\to -1}\frac{\frac{d}{dx}\left(3x^3+3x^2+x+1\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to -1}\frac{9x^2+6x+1}{2x}=-2$$

$$3)\lim_{x\to 1}\frac{x^{1/3}-x^{1/2}}{x^{1/4}-x^{1/5}}$$

حل:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{1/3}-x^{1/2}}{x^{1/4}-x^{1/5}}=\frac{0}{0}\Rightarrow L=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}\left(x^{1/3}-x^{1/2}\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^{1/4}-x^{1/5}\right)}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}-\frac{1}{2}x^{-1/2}}{\frac{1}{4}x^{-3/4}-\frac{1}{5}x^{-4/5}}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}=\frac{-10}{3}$$

$$4)\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ L=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\frac{-2}{2\sqrt{2x+1}}}\Rightarrow L=\frac{\frac{-1}{4}}{\frac{-1}{3}}=\frac{3}{4}$$

5) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\dfrac{0}{0}$ مبهم $\xrightarrow{Hop} L=\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}\Rightarrow L=\dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{9}}}{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{64}}}=\dfrac{\dfrac{-1}{6}}{\dfrac{1}{12}}=-2$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x}}{2x+1}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x}}{2x+1}=\dfrac{\infty}{\infty}$ مبهم $\xrightarrow{Hop} L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2}=\dfrac{1}{2}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=0\times\infty$ مبهم $\Rightarrow\quad L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=\dfrac{0}{0}$ مبهم

$\xrightarrow{Hop} L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{-1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}}\quad\Rightarrow\quad\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{1}{x}=1$

8) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sin x}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sin x}=\dfrac{0}{0}$ مبهم $\xrightarrow{Hop} L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}}{\cos x}=\infty$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\dfrac{0}{0}$ مبهم $\xrightarrow{Hop} L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-3\sin 3x}{2x}=\dfrac{0}{0}$ مبهم

$\xrightarrow{Hop} L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x+9\cos 3x}{2}=\dfrac{8}{2}=4$

10) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

حل: $L=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}=\dfrac{0}{0}$ مبهم $\xrightarrow{Hop} L=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cos x}{\sin x}=-\infty$

$$11)\lim_{x\to 0} x\cot 2x$$

حل:

$$L=\lim_{x\to 0} x\cot 2x = 0\times\infty \text{ مبهم } \Rightarrow L=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan 2x}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{Hop} L=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\left(1+\tan^2 2x\right)}=\frac{1}{2}$$

$$12)\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\tan x}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\tan x}=\frac{0}{0}\text{ مبهم } \xrightarrow{Hop} L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\left(1+\tan^2 x\right)}=\frac{0}{0}\text{ مبهم}$$

$$\xrightarrow{Hop} L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{-2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{-2\dfrac{\sin x}{\cos x}\times\left(1+\tan^2 x\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{-2\left(1+\tan^2 x\right)}=\frac{-1}{2}$$

$$13)\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{x^3}$$

حل:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{x^3}=\frac{0}{0}\text{ مبهم } \xrightarrow{HOP} L=\lim_{x\to 0}\frac{\sec x\tan x}{3x^2}=\frac{0}{0}\text{ مبهم}$$

$$\xrightarrow{HOP} L=\lim_{x\to 0}\frac{\sec x\tan^2 x+\sec^3 x}{6x}=\infty$$

$$14)\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$$

حل: مبهم

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty\text{ مبهم } \Rightarrow L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{Hop} L=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\frac{0}{0}\text{ مبهم}$$

$$\xrightarrow{HOP} L=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0$$

$$15)\lim_{x\to 0}\left(\csc x-\frac{1}{x}\right)$$

حل: مبهم

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\csc x-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty\text{ مبهم } \Rightarrow L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x\sin x}\right)=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP} L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\frac{0}{0}\text{ مبهم } \xrightarrow{HOP} L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0$$

16) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

حل:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\xrightarrow{HOP}L=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin x}=\frac{1}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

17) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\tan^2 x}$

حل:

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\tan^2 x}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\xrightarrow{HOP}L=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sqrt{2}\sin x}{-2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)}=\frac{1}{4}$$

18) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\csc\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)$

حل:

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\csc\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)=0\times\infty\ \text{مبهم}\Rightarrow L=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{HOP}L=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)}=1$$

19) فرض کنید F در همسایگی a مشتق‌پذیر بوده، و $\lim\limits_{x\to a}F'(x)$ موجود و متناهی باشد. با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، نشان دهید که $F'(a)=\lim\limits_{x\to a}F'(x)$.

حل:

$$F'(a)=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\frac{F(a)-F(a)}{a-a}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{HOP}F'(a)=\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{1}\quad\Rightarrow\quad F'(a)=\lim_{x\to a}F'(x)$$

20) بدون استفاده از فضیهٔ مقدار میانگین کشی، صورت ساده شده قاعدهٔ هوپیتال برای $\frac{0}{0}$ که اغلب مفید است را ثابت کنید. فرض کنید.

(یک) f و g در a مشتق‌پذیر بوده و $g'(a)\neq 0$.

(دو) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ در این صورت، $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$ صورت مبهمی از $\frac{0}{0}$ مثال بزنید که به این روش رفع شود.

حل: طبق فرض f و g در a مشتق‌پذیرند و پیوسته هستند. لذا داریم:

$$f(a)=\lim_{x\to a}f(x) \qquad g(a)=\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0 \quad\Rightarrow\quad f(a)=g(a)=0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-0}{g(x)-0}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

حل قسمت دوم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax+b}{x^2}$$

❖ حدود زیر را محاسبه کنید.

$$21)\ \lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x-\frac{1}{x^2}\right)$$

حل:

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\cos^2 x-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{Hop} L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x\cos^2 x-x^2\sin 2x-\sin 2x}{2x\sin^2 x+x^2\sin 2x}\right)=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{Hop} L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cos^2 x-2x\sin 2x-2x\sin 2x-2x^2\cos 2x-2\cos 2x}{2\sin^2 x+2x\sin 2x+2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}\right)=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{Hop} L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin 2x-4\sin 2x-8x\cos 2x-4x\cos 2x+4x^2\sin 2x+4\sin 2x}{2\sin 2x+4\sin 2x+8x\cos 2x+4x\cos 2x-4x^2\sin 2x}\right)$$

$$\Rightarrow\ L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin 2x-12x\cos 2x+4x^2\sin 2x}{6\sin 2x+12x\cos 2x-4x^2\sin 2x}\right)=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{Hop} L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-4\cos 2x-12\cos 2x+24x\sin 2x+8x\sin 2x+8x^2\cos 2x}{12\cos 2x+12\cos x-24x\sin 2x-8x\sin 2x-8x^2\cos 2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-16\cos 2x+32x\sin 2x+8x^2\cos 2x}{24\cos 2x-32x\sin 2x-8x^2\cos 2x}\right)=\frac{-16}{24}=\frac{-2}{3}$$

$$22)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan 2x}{\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}$$

حل:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan 2x}{\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{\infty}{\infty}\ \text{مبهم}$$

$$\Rightarrow \quad L=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cot 2x}}{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cot 2x}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$\xrightarrow{Hop} L=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)}{-2\left(1+\cot^2 2x\right)}=\frac{1}{2}$$

23) از مسئله ۱۹ (اشتباهاً) این برداشت می‌شود که $F'(a)$ همواره مساوی $\lim_{x\to a}F'(x)$ است.

تابع F را طوری مثال بزنید که F' در همسایگی a تعریف شده باشد ولی $F'(a)\neq\lim_{x\to a}F'(x)$. این را با مسئله ۱۹ آشتی دهید.

حل: فرض کنید $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & , \ x\neq 0\\ 0 & , \ x=0\end{cases}$ باشد و F همه مشتق‌پذیر بوده و $F'(0)=0$ بوده ولی $\lim_{x\to 0}F'(x)$ وجود ندارد.

24) با فرض وجود حد در مثال ۳، آن را بدون قاعده هوپیتال حساب کنید.

حل: داریم: $L=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

$\sin 3t=3\sin t-4\sin^3 t$ فرض می‌کنیم

$$\Rightarrow \quad L=\lim_{t\to 0}\frac{3t-\sin 3t}{(3t)^3}=\lim_{t\to 0}\frac{3t-3\sin t+4\sin^3 t}{27t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{3(t-\sin t)}{27t^3}+\lim_{x\to t}\frac{4}{27}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^3$$

$$\Rightarrow \quad L=\frac{3}{27}L+\frac{4}{27} \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{9}L=\frac{4}{27} \quad \Rightarrow \quad L=\frac{1}{6}$$

28) $f(x)=x^{1/3}(1-x)^{2/3}$

حل:

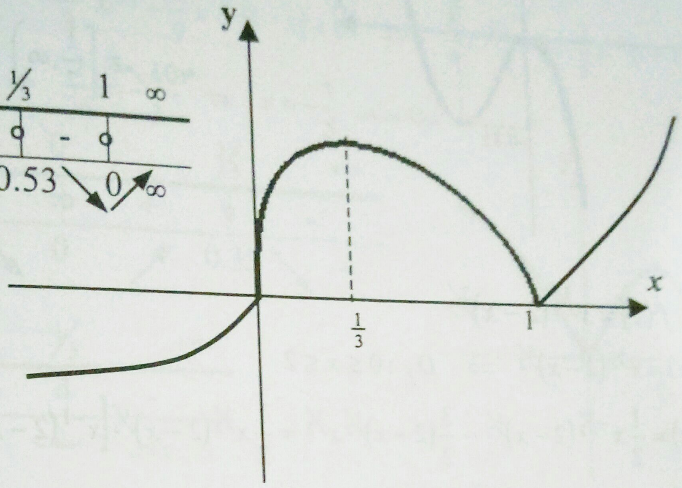
$f(x)=x^{1/3}(1-x)^{2/3} \quad \Rightarrow \quad D_f : R$

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}(1-x)^{2/3}-\frac{2}{3}x^{1/3}(1-x)^{-1/3}=\frac{1}{3}x^{1/3}(1-x)^{2/3}\left[x^{-1}-2(1-x)^{-1}\right]$$

$$=\frac{1}{3}x^{1/3}(1-x)^{2/3}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{1-x}\right)=0$$

$x=0\ ,\ x=1\ ,\ x=\frac{1}{3}$ نقاط بحرانی

x	$-\infty$	0		$1/3$		1	∞
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗	0.53	↘	0	↗ ∞



$$f''(x)=\frac{-2}{9}x^{-5/3}(1-x)^{2/3}-\frac{2}{9}x^{-2/3}(1-x)^{-1/3}-\frac{2}{9}x^{-2/3}(1-x)^{-1/3}-\frac{2}{9}x^{1/3}(1-x)^{-4/3}$$

$$=-\frac{2}{9}x^{-2/3}(1-x)^{-1/3}\left[x^{-1}(1-x)+2+x(1-x)^{-1}\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-x}{x}+\frac{x}{1-x}+2=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(1-x)^2+x^2+2x-2x^2}{x(1-x)}=0$$

❖ حدود زیر را محاسبه کنید.

29) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$

حل:

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{5^5\ x^5}=\frac{1}{5^5}=5^{-5}$$

30) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(2x-3)^{20}\cdot(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

حل:

$$L=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2)^{20}x^{20}\cdot(3)^{30}x^{30}}{2^{50}x^{50}}=\frac{2^{20}\times3^{30}}{2^{50}}=\frac{2^{20}\times3^{30}}{2^{20}\times2^{30}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{30}$$

31) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{4\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}\right)$

$L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{4\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}\right)=\left(\dfrac{1}{\sin^2(0)}-\dfrac{1}{4\sin^2\left(\dfrac{0}{2}\right)}\right)=\infty-\infty$ مبهم

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}-\sin^2 x}{4\sin^2 x\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}-\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2}{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2\cdot 4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}\left[1-\cos^2\frac{x}{2}\right]}{16\sin^4\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}$$

32) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

$L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)=\infty-\infty$ مبهم

$$\Rightarrow\ L=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\times\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x}-x\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$$

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right]}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\frac{1}{2}$$

33) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

$L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\infty-\infty$ مبهم

$$\Rightarrow\ L=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\times\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow\quad L=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)}{\sqrt{x}\left[\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}\right)+1\right]}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}\right)+1}=\frac{1}{2}$$

34) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$

حل:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)=\infty-\infty \quad \text{مبهم}$$

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)\times\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x-\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$\Rightarrow\quad L=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\times\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)\times\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left[\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right]\left[\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right]}=\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$$

$$35)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+100}}$$

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+100}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{100}{\sqrt{x}}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{100}{\sqrt{x}}}\right)}=1$$

$$36)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$$

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)\times\frac{\sin\sqrt{x+1}+\sin\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x+1}+\sin\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2\sqrt{x+1}-\sin^2\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x+1}+\sin\sqrt{x}}=\frac{?}{?}$$

$$\xrightarrow{Hop} L=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}\sin 2\sqrt{x+1}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin 2\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x+1}}\cos\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}=\text{وجود ندارد}$$

حدهای داده شده را در صورتی حساب کنید که m و n اعداد صحیح مثبت دلخواهی باشد.

$$37)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{Hop} L=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}}}{1}=\frac{1}{n}$$

$$38)\ \lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\Lambda+x^n-n}{x-1}$$

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\Lambda+x^n-n}{x-1}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{Hop} L=\lim_{x\to 1}\frac{1+2x+\Lambda+nx^{n-1}}{1}$$

$$L=\lim_{x\to 1}\left(1+2x+3x+\Lambda+nx^{n-1}\right)=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$39)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$$

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{Hop} L=\lim_{x\to 1}\frac{(n+1)x^n-(n+1)}{2(x-1)}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{Hop} L=\lim_{x\to 1}\frac{n(n+1)x^{n-1}}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$